ワイブル寿命を持つアイテムの予防保全特性

著者	高橋　善人
学位授与機関	東京商船大学
学位授与年度	1998
URL	http://id.nii.ac.jp/1342/00000658/

修　士　論　文

題　　目　ワイブル寿命を持つアイテムの予防保全特性

指導教官　堀籠　教夫

課 程 名　交通電子機械工学専攻

学籍番号・氏 名　96309　高橋　善人

平成 11 年 1 月 28 日 提 出

目 次

表 目 次

図 目 次

1 まえがき

一般に、保全は事後保全と予防保全に大別され、そのうち予防保全の重要性はアイテムの複雑化や巨大化とともに増大の一途をたどっている。特に、定期保全や定期交換は現場で最も実施されやすい保全方法の一つであり、その大切さはいうまでもない。従って、従来から Barlow や Proschan[1] をはじめとする多くの研究者によって検討され、保全理論が導き出された。またそれらの研究結果は予防交換や予防保全に極めて多くの指針を与えてきたし、それらのもつ重要性は現在においても少しも変わらない。

現在まで予防保全がアイテムなどの信頼性や保全特性に与える影響は最適保全等を中心に検討されてきたが、予防保全下における寿命分布、平均寿命を始めとする特性等を具体的に考察した報告は少ない。一方、一般に保全は多くの要因によって実施されているため、保全データは非常に解析しにくいという性質がある。特に、定期保全によって、あるアイテムの持つ真の寿命が不明になるからである。

本研究では、信頼度関数としてワイブル分布を取り上げ、予防保全下におけるその分布の特性等について考察する。特に、ワイブル分布の形状パラメータ β が $\beta > 1$ という条件の下で、予防保全によるその効果を考察する。ここでは予防保全方式として厳格な定期保全とその対極にあるランダム予防保全の２つを取り上げる。次に予防保全の実施による平均稼働時間 (MTBF) の増加を信頼度改善率で評価し、また変動係数を介して予防保全下におけるアイテムの稼働時間の分布を検討することが目的である。

次に本報告で使用される記号を以下に示す。

$F(t)$ 交換アイテムの故障分布関数

$\overline{F}(t)$ $1-F(t)$

$G(t)$ 予防保全の分布関数

$\overline{G}(t)$ 予防保全しない分布関数 $1-G(t)$

$g(t)$ $G(t)$ の確率密度関数 $g(t)=G(t)/dt$

$\overline{H}(t)$ 時刻 t まで故障もせず予防保全も行われなかった場合の関数$\overline{F}(t)\overline{G}(t)$

$H(t)$ $1-\overline{F}(t)\overline{G}(t)$

$R(t)$ 予防保全におけるアイテムの信頼度関数

$f(t)$ $F(t)$ の確率密度関数 $-dR(t)/dt$

$\langle t \rangle$ 予防保全の１次モーメント、または平均故障間隔ＭＴＢＦ

$\langle t^n \rangle$ n次モーメント

μ 予防保全分布の修復率 $G(t)=1-exp(-\mu t)$

$\Gamma(\cdot)$ ガンマ関数

$\Gamma[\cdot,\cdot]$ 不完全ガンマ関数

$\delta(\cdot)$ ディラクの関数

β ワイブル分布の形状パラメータ、ただし$\beta > 1$ とする

η ワイブル分布の尺度パラメータ

CV 変動係数

τ 信頼度改善率

T 予防保全の時間間隔

さらに、添え字のＰとＲはそれぞれ定期交換、ランダム交換を表す。

2 理論的背景

2.1 信頼性の定義

信頼性は「系、機器、部品などの、機能の時間的安定性を表わす度合または性質」と定義されている。つまり、アイテムが信頼できるかどうかは、アイテムが規定の時間、使用状態を満足できるかどうかということである。アイテムの状態を正常に保つためには、故障が発生しないようにするか、または故障しても安定した状態に保全するということが考えられる。故障を起こさないようにするには、はじめからアイテムの信頼度をたかめることが必要であるが、欠陥のない完全なアイテムを現実化するのは極めて困難である。そこで、安定した使用状態の維持には、故障の原因となる危険因子を設計の段階から取り除くことはもちろんのこと、故障が起こる前に保全を行うことが重要である。このような保全を予防保全という。またこれに対し、故障が発生した後に行う保全を事後保全という。

保全方法はアイテムの故障率すなわち時間当たりの故障の起こる確率のパターンによって決められることが多い。故障率は次の３つの型が基本となっている。

単調減少型	DFR (Decreasing Failure Rate)
一定型	CFR (Constant Failure Rate)
単調増加型	IFR (Increasing Failure Rate)

また、図 1に故障率の３つの基本型の概要を示す。

DFR に従うアイテムは、使用の初期において、もともと故障しやすい欠陥を持ったものが故障し、時間の経過とともに故障件数が減少していき、残りのものほど故障しにくくなるという性質を持つ。時間が経つにつれて故障率が減少するので、アイテムが正常に機能している割合は時間の経過と共に増加していく。こ

のような型に従うものの代表として、ソフトウェアが挙げられる。ソフトウェアの故障に関しては予防保全を行ったとしても効果はなく、テストとデバギングを繰り返して信頼性を高めるほか方法はない。

故障率が一定ということは、いつ故障が発生するか全くわからないような場合である。この時の信頼度は指数型をしており、平均故障間隔 MTBF は指数分布で表わされる。故障が偶発的に起こるアイテムに対していかなる保全を施しても効果はなく、信頼度は改善されないことが明らかになっている。

IFR は時間とともに故障率が上昇する型である。これは機械的素子や部品の摩耗、人間の老化期間に見られるパターンであり、アイテムの故障の特徴を最もよく表わす本質的な型であるといえる。また故障率増加型はある時点において集中的に故障するという特徴を持っている。このことは故障が集中的に発生する前に、予防保全を行うことによって未然に故障を防ぐことができることを意味し、予防保全が多くの種類のアイテムに対して有効であることを示している。

2.2 予防保全における信頼度関数 [1],[2]

予防保全における信頼度関数 $R_P(t)$ は、図 2 で示すように、次の二つの場合から構成される。

一つは時刻 t までに故障がなく予防保全も行われなかった場合の分布 $R(t)\overline{G}(t)$ であり、これを $\overline{H}(t)$ で表す。ここで $\overline{G}(t)$ は保全を行わない関数であり、$R(t)$ はアイテム本来の信頼度関数である。もう一つは時刻 t 以前のある時刻 τ で予防保全を実施し、時刻 t まで故障しないで稼働した場合であり、それは $\int_0^t R_P(t-\tau)\psi(\tau)dt$ である。ここで $\psi(\tau)$ は時刻 τ まで故障しないで予防保全を実施した場合の確率、すなわち、$\psi(\tau) = R(\tau)g(\tau)$ である。ここで $R(\tau)$ は予防保全を実施しない場合の信頼度関数、つまりアイテムが元来所有している信頼度関数である。また $g(\tau)$ は、

時刻 τ における保全確率密度関数である。こうして、これらを考慮すると、信頼度関数 $R_P(t)$ は次式で与えられる。

$$R_P(t) = \overline{H}(t) + \int_0^t R_P\,(t-\tau)\psi(\tau)\,d\tau \tag{2.1}$$

また、(2.1) 式をラプラス変換することにより

$$R_P(s) = \frac{\overline{H}(s)}{1-\Psi(s)} \tag{2.2}$$

が得られる。なお、s はラプラス演算子である。

2.3 時刻 t におけるｎ次モーメント

(2.2) 式を直接解析することは困難であるので、ここで時刻 t におけるｎ次モーメント $\langle t^n \rangle$ を導入する。

ｎ次モーメントは、その定義より、

$$\langle t^n \rangle = \int_0^\infty t^n f(t)dt = n\int_0^\infty t^{n-1}R(t)dt \tag{2.3}$$

と表す。

一方、ラプラス変換の定義から、信頼度関数 $R(s)$ は次のようになる

$$R(s) = \int_0^{\infty} exp(-st)R(t)dt$$

また、上式を s に関して $(n-1)$ 微分し、さらに $s=0$ を代入すると、次の関係が得られる。

$$\left.\frac{d^{n-1}R(s)}{ds^{n-1}}\right|_{s=0} = \int_0^{\infty} (-t)^{n-1}R(t)dt \qquad (2.4)$$

こうして（2.3）式と（2.4）式からn次モーメント $\langle t^n \rangle$ が次のように得られる。

$$\langle t^n \rangle = (-1)^{n-1} n \left.\frac{d^{n-1}R(s)}{ds^{n-1}}\right|_{s=0} \qquad (2.5)$$

上式は G. Weiss (1956) によって導かれたものである。

2.4 予防保全における１次と２次モーメント

予防保全における１次モーメントは、(2.5) 式に $n = 1$ を代入することにより次のように得られる。

$$\langle\, t \,\rangle = \left.\frac{d^0 R(s)}{ds^0}\right|_{s=0} = R(s)|_{s=0}$$

また上式を (2.2) 式に代入すると、$\langle t \rangle$ は

$$\langle\, t \,\rangle = \left.\frac{\overline{H}(s)}{1-\Psi(s)}\right|_{s=0} = \frac{\int_0^\infty R(t)\overline{G}(t)\,dt}{1-\int_0^\infty R(t)g(t)\,dt} \qquad (2.6)$$

となる。上式は、予防保全におけるアイテムの平均稼働時間である。また、２次モーメントも同様に (2.5) 式に $n = 2$ を代入することにより、

$$\langle\, t^2 \,\rangle = \left.\frac{-2dR(s)}{ds}\right|_{s=0}$$

が得られる。また、ここで

$$\left.\frac{dR(s)}{ds}\right|_{s=0} = \left.\frac{\left\{d\overline{H}(s)/ds\right\}(1-\Psi(s)) + \overline{H}(s)\left\{d\Psi(s)/ds\right\}}{\left\{1-\Psi(s)\right\}^2}\right|_{s=0}$$

であり、しかも、

$$\left.\frac{\overline{H}(s)}{ds}\right|_{s=0} = -\int_0^\infty t\overline{F}(t)\overline{G}(t)dt$$

また

$$\left.\frac{\Psi(s)}{ds}\right|_{s=0} = -\int_0^\infty t\overline{F}(t)g(t)dt$$

と与えられることがわかる。

こうして $\langle t^2 \rangle$ は次式のようになる。

$$\langle t^2 \rangle = \frac{2\int_0^\infty tR(t)\overline{G}(t)\,dt}{1-\int_0^\infty R(t)g(t)\,dt} + \frac{2\int_0^\infty R(t)\overline{G}(t)\,dt \cdot \int_0^\infty tR(t)g(t)\,dt}{\{1-\int_0^\infty R(t)g(t)\,dt\}^2} \tag{2.7}$$

ここで $\overline{G}(t)$ は既述のように保全を実施しない関数である。また、$\overline{G}(t) = 1-G(t)$ であり、$g(t) = dG(t)/\,dt$ である。

2.5 予防保全下における平均と分散

予防保全における平均は、1次モーメントの式（2.6）により得られる。また分散は、$\sigma^2 = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2$ で与えられるから、1次モーメントと2次モーメントで表されることがわかる。1次、2次モーメントはすでに求められているから、（2.6）式と（2.7）式から分散 σ^2 は、

$$\sigma^2 = \frac{2\int_0^\infty t\overline{F}(t)\overline{G}(t)dt}{1-\int_0^\infty \overline{F}(t)g(t)dt} + \frac{2\int_0^\infty \overline{F}(t)\overline{G}(t)dt \cdot \int_0^\infty t\overline{F}(t)g(t)dt}{\left\{1-\int_0^\infty \overline{F}(t)g(t)dt\right\}^2} - \left\{\frac{\int_0^\infty \overline{F}(t)\overline{G}(t)dt}{1-\int_0^\infty \overline{F}(t)g(t)dt}\right\}^2 \quad (2.8)$$

で与えられる。

2.6 信頼度改善率と変動係数

予防保全特性を比較するため、信頼度改善率と変動係数を導入して評価する。これらは後の考察の重要な指標となるため、以下にその定義を与える。

（1）信頼度改善率 τ

信頼度改善率 τ は次のように与えられる。

$$\tau = \frac{\langle t \rangle - \bar{t}}{\bar{t}} = \frac{\langle t \rangle}{\bar{t}} - 1 \qquad (2.9)$$

ここで、$\langle t \rangle$ は予防保全下の平均値（1次モーメント）、$\bar{t}$ はアイテム自身が本来固有する平均寿命である。この指標の特徴として次の二つがあげられる。一つとして、予防保全を行った場合のアイテムの平均稼働時間は、予防保全の効果により、それ自身の平均稼働時間より大きくなるため、一般に信頼度改善率 τ は正となる。また、指数分布に従うアイテムではいかなる保全が実施されても信頼度改善率は $\tau = 0$ となることは明らかである。

（2）変動係数 CV

変動係数 CV については、その定義から、それを平均と分散で表わすと次のようになる。

$$CV = \sqrt{\frac{\text{分散}}{\{\text{平均}\}^2}}$$

従って, 上式をモーメントで表示すれば以下のように与えられる。

$$CV = \sqrt{\frac{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2}{\langle t \rangle^2}} = \sqrt{\frac{\langle t^2 \rangle}{\langle t \rangle^2} - 1} \qquad (2.10)$$

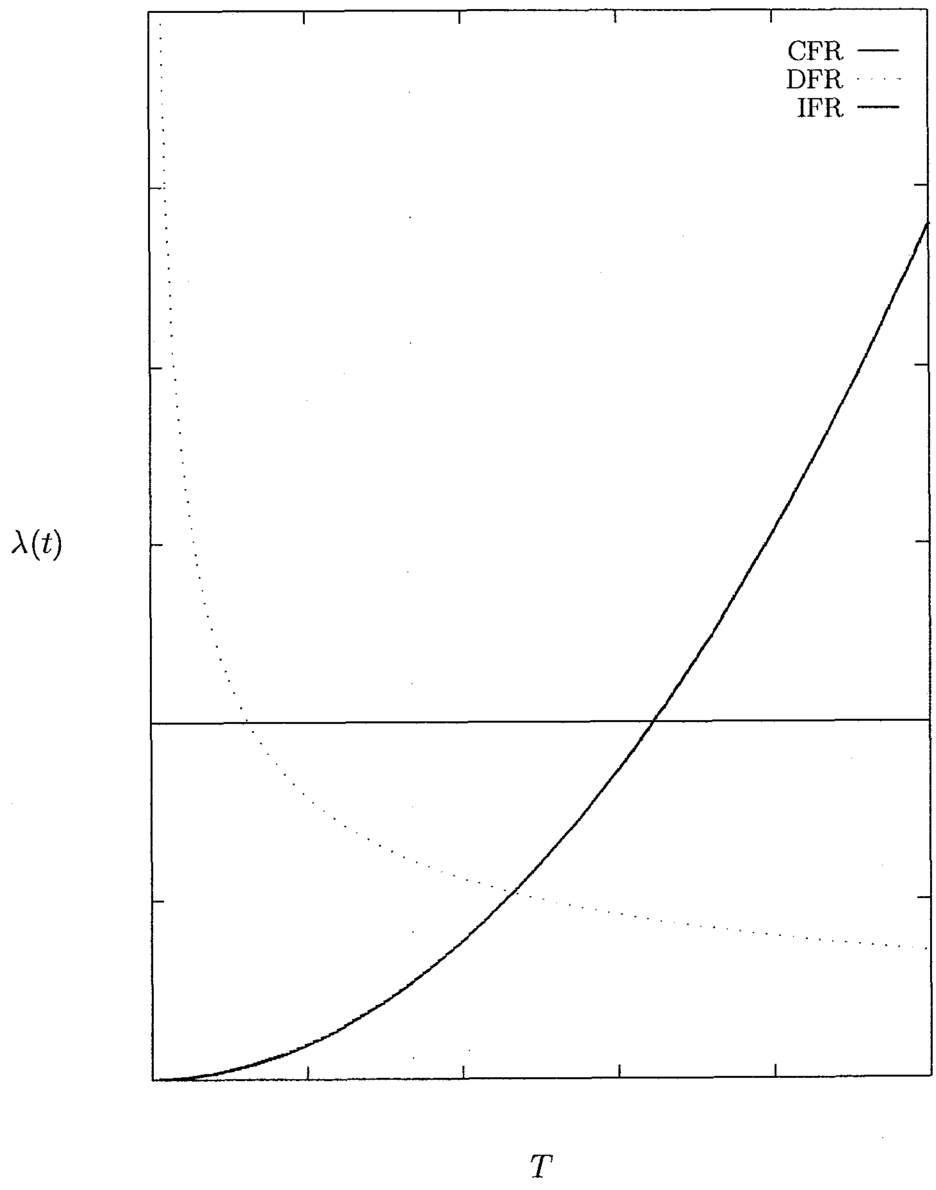

図 1: 故障率の３つの基本型の概要

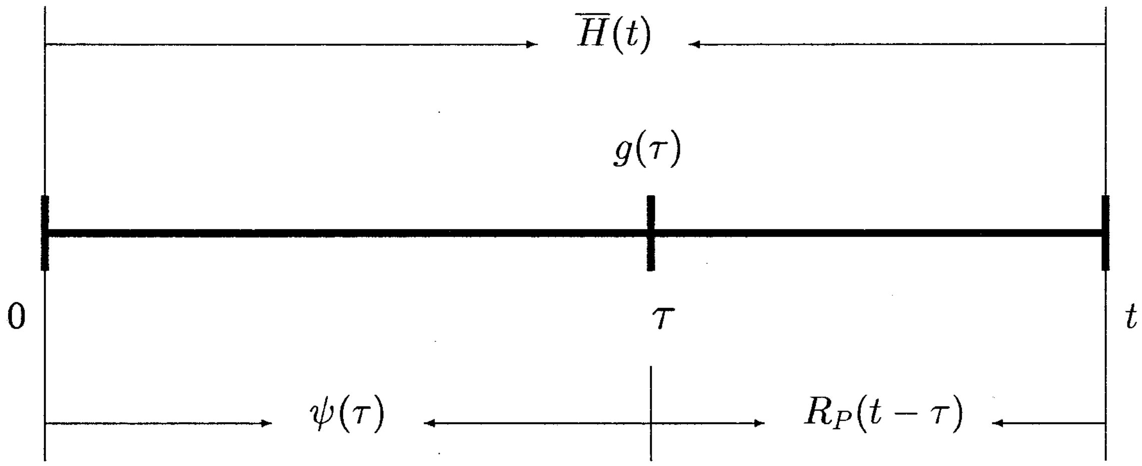

図 2: 予防保全における信頼度関数 $R_P(t)$ の概要

3　2つの予防保全方式

ここでは、第2章で述べた理論的結果を用いて、2つの予防保全方式について考察する。1つは定期予防保全であり、もう1つはランダム予防保全である。両者は極めて典型的な予防保全方式であり、現実の予防保全は、この両者の中間領域で実施されていると推測される。

3.1　定期予防保全

(1) MTBF $\langle t \rangle_P$

時刻 T で定期予防交換が行われる場合、予防保全しない関数$\overline{G}(t)$ とその確率密度関数 $g(t)$ は図3、および図4のようになる。

$$\overline{G}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

さらに、図4から、

$$g(t) = \delta(t - T)$$

である。従って、（2.6）式の分子と分母は次のように表される。

$$\int_0^T \overline{G}(t)\overline{F}(t)dt = \int_0^T \overline{F}(t)dt$$

$$\int_0^T \overline{F}(t)g(t)dt = \int_0^T \overline{F}(t)\delta(t-T)dt = \overline{F}(T)$$

よって $1 - \int_0^T \overline{F}(t)g(t)dt = F(T)$ だから、１次モーメントは

$$\langle t \rangle_P = \frac{\int_0^T \overline{F}(t)dt}{1-\overline{F}(T)} = \frac{\int_0^T \overline{F}(t)dt}{F(T)} \qquad (3.1)$$

で与えられることになる。

（2）分散 ${\sigma^2}_P$

分散 σ^2は２次モーメント $\langle t^2 \rangle_P$ を用いることにより得られる。$g(t) = \delta(t-T)$ より（2.7）式は次のようになる。

$$\int_0^\infty \{t\overline{F}(t)\}\,\delta(t-T)dt = T\overline{F}(T)$$

よって $\langle t \rangle^2{}_P$ は

$$\langle t \rangle^2{}_P = \frac{2\int_0^T t\overline{F}(t)dt}{F(T)} + \frac{2T\overline{F}(T)\int_0^T \overline{F}(t)dt}{F(T)^2} \tag{3.2}$$

となり、分散は次のようになる。

$$\sigma^2{}_P = \frac{2F(T)\int_0^T t\overline{F}(t)dt + 2T\overline{F}(T)\int_0^T \overline{F}(t)dt}{F(T)^2} - \frac{\left(\int_0^T \overline{F}(t)dt\right)^2}{F(T)^2} \tag{3.3}$$

3.2　ランダム予防保全

ここでは、ランダム予防保全について取り扱う。まずはじめにランダムな予防保全について考察すると次のようになる。

独立性　ある一定時間内に行う予防保全の回数は、それ以前の予防保全の回数や予防保全の方法とは何の関係もない。

定常性　同一時間長さであれば、その間に行う予防保全の回数の分布は、観測の開始時点に依存しない。

順序性　予防保全を同時に２つ以上行う確率は無視できると仮定する。こうして予防保全は必ず１回ずつ行うことになり、予防保全に順序の付加が可能となる。

（1） MTBF $\langle t \rangle_R$

ランダム予防保全方式の場合、保全しない関数を $G(t) = 1 - exp(-\mu t)$ とする。これから $\overline{G}(t)$ と $g(t)$ はそれぞれ $\overline{G}(t) = exp(-\mu t)$、$g(t) = \mu\, exp(-\mu t)$ となる。これらを（2.6）式に代入すれば、１次モーメントすなわちMTBFは次のようになる。

$$\langle t \rangle_R = \frac{\int_0^\infty \overline{F}(t) exp(-\mu t) dt}{1 - \mu \int_0^\infty \overline{F}(t) exp(-\mu t) dt} \qquad (3.4)$$

（2） 分散 $\sigma^2{}_R$

同様にして分散は、$\sigma^2{}_R = \langle t^2 \rangle_R - \langle t \rangle^2{}_R$ の関係から求められる。n＝2として（2.7）式から２次モーメントを計算すると

$$\langle t^2 \rangle_R = \frac{2\int_0^\infty t\overline{F}(t) exp(-\mu t) dt}{1 - \mu \int_0^\infty \overline{F}(t) exp(-\mu t) dt} + \frac{2\int_0^\infty \overline{F}(t) exp(-\mu t) dt \cdot \int_0^\infty t\overline{F}(t) \mu exp(-\mu t) dt}{\left\{1 - \mu \int_0^\infty \overline{F}(t)\, exp(-\mu t) dt\right\}^2} \qquad (3.5)$$

となる。

これにより、ランダム予防保全の分散 $\sigma^2{}_R$が得られる。

$$\sigma^2{}_R = \frac{2\int_0^\infty t\overline{F}(t)exp(-\mu t)dt}{1-\mu\int_0^\infty \overline{F}(t)exp(-\mu t)dt}$$

$$+\frac{2\int_0^\infty \overline{F}(t)exp(-\mu t)dt\cdot\int_0^\infty t\overline{F}(t)\mu exp(-\mu t)dt}{\left\{1-\mu\int_0^\infty \overline{F}(t)\,exp(-\mu t)dt\right\}^2}$$

$$-\left\{\frac{\int_0^\infty \overline{F}(t)exp(-\mu t)dt}{1-\mu\int_0^\infty \overline{F}(t)exp(-\mu t)dt}\right\}^2 \tag{3.6}$$

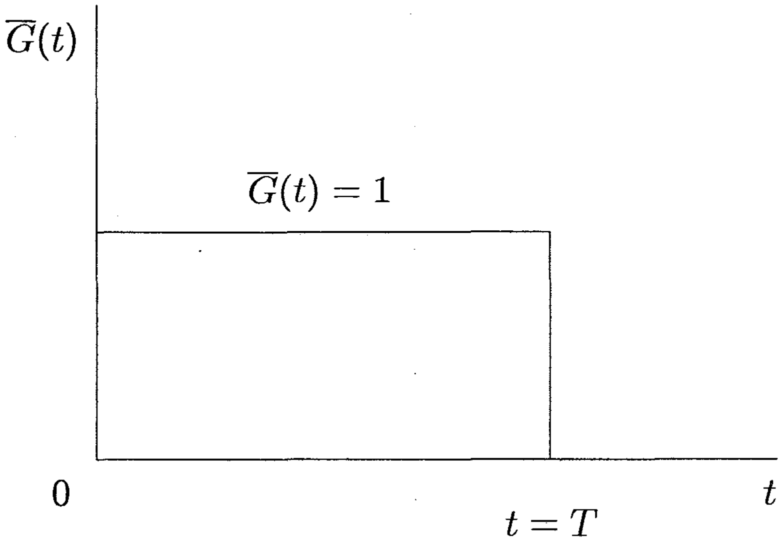

図 3: 定期予防保全における分布関数 $\overline{G}(t)$ の概要

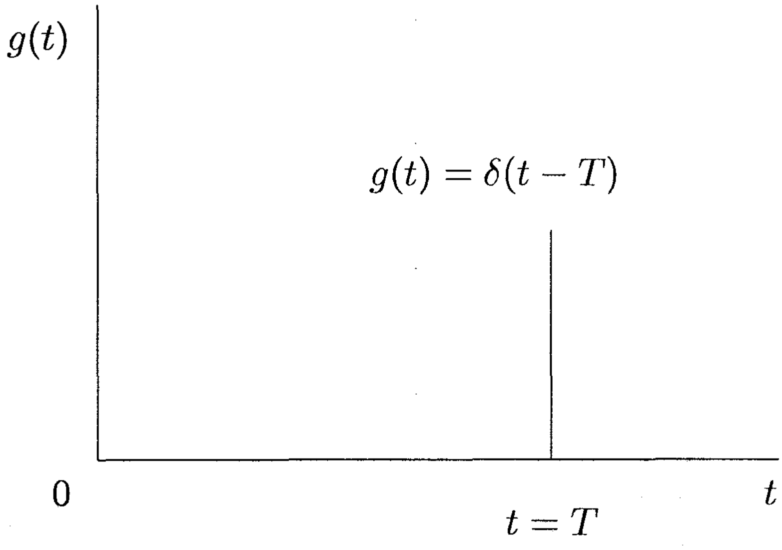

図 4: 定期予防保全における保全密度関数 $g(t)$ の概要

4　ワイブル分布への応用

これまでの理論結果をワイブル分布に適用し、その予防保全特性を考察する。ここでワイブル分布は次式で与えられているとする。

$$R(t) = exp\left\{-(t/\eta)^{\beta}\right\} \tag{4.1}$$

ワイブル分布は形状パラメータ β を $\beta < 1$ 、$\beta = 1$ 、$\beta > 1$ と選ぶことにより故障率をＤＦＲ、ＣＦＲ、ＩＦＲの３つの型に対応させることができる。実際には、アイテムに発生する故障時間間隔が比較的ワイブル分布に近似できることが多く、また故障データの解析等でも広く使用されている。ワイブル分布の確率密度分布は次式で表わされ、形状パラメータ β に対する故障密度関数の変化の様子を図 5に示す。

$$f(t) = -\beta\,/\,\eta \cdot (t/\,\eta)^{\beta-1} \cdot exp\,\{(-(t/\,\eta)^{\beta}\}$$

ここで、予防保全を実施する上で故障率が時間の経過とともに増加する必要があるため、$\beta > 1$ とする。また、この分布の平均と分散は、次式で与えられる。

$$E(t) = \eta\Gamma(1/\,\beta + 1) \tag{4.2}$$

$$V(t) = \eta^2 \left\{\Gamma(2/\,\beta + 1) - \Gamma(1/\,\beta + 1)^2\right\} \tag{4.3}$$

4.1 予防保全の特性

（1） 定期予防保全の場合

ワイブル分布を当てはめた場合の１次と２次モーメントは次のようになる。

$$\langle t \rangle_P = \frac{\int_0^{T_P} exp\left\{-(t/\eta)^\beta\right\} dt}{1-exp\{-(T_P/\eta)^\beta\}}$$

$$= \frac{\eta/\beta\cdot\Gamma\left[(1/\beta),(T_P/\eta)^\beta\right]}{\Gamma\left[1,(T_P/\eta)^\beta\right]} \tag{4.4}$$

$$\langle t^2 \rangle_P = \frac{2\eta^2/\beta\cdot\Gamma\left[(2/\beta),(T_P/\eta)^\beta\right]}{\Gamma\left[1,(T_P/\eta)^\beta\right]} + \frac{2T_P\,\eta/\beta\cdot exp\left\{-(T_P/\eta)^\beta\right\}\cdot\Gamma\left[(1/\beta),(T_P/\eta)^\beta\right]}{\Gamma\left[1,(T_P/\eta)^\beta\right]^2} \tag{4.5}$$

ここで $1-exp\left\{-(T_P/\eta)^\beta\right\}=\Gamma\left[1,(T_P/\eta)^\beta\right]$ の関係を用いた。なお、このときの平均稼働時間 $E_P(t)$ は (4.2) 式である。

一方、分散 $V_P(t)$ は１次と２次モーメントから

$$V_P(t) = \frac{\eta^2/\beta\cdot\Gamma\left[(2/\beta),(T_P/\eta)^\beta\right]}{\Gamma\left[1,(T_P/\eta)^\beta\right]}$$

$$+\frac{2\,T_P\,\eta/\,\beta\cdot exp\left\{-(T_P/\,\eta)^{\beta}\right\}\cdot\Gamma\left[(1/\,\beta),(T_P/\,\eta)^{\beta}\right]}{\Gamma\left[1,(T_P/\,\eta)^{\beta}\right]^2}$$

$$-\left\{\frac{\eta/\,\beta\cdot\Gamma\left[(1/\,\beta),(T_P/\,\eta)^{\beta}\right]}{\Gamma\left[1,(T_P/\,\eta)^{\beta}\right]}\right\}^2 \qquad (4.6)$$

従って、この場合における信頼度改善率 τ は (2.9) 式と (4.2) 式から次のようになる。

$$\tau_P=\frac{\Gamma\left[(1/\,\beta),(T_P/\,\eta)^{\beta}\right]}{\beta\,\Gamma(1/\,\beta+1)}-1 \qquad (4.7)$$

一方、変動係数 CV_P は、(2.10) 式に (4.4) 式と (4.5) 式を代入すると

$$CV_P{}^2=2\beta\left\{\frac{\Gamma\left[(2/\,\beta),(T_P/\,\eta)^{\beta}\right]\cdot\Gamma\left[1,(T_P/\,\eta)^{\beta}\right]}{\Gamma\left[(1/\,\beta),(T_P/\,\eta)^{\beta}\right]^2}\right.$$

$$\left.+\frac{T_P\,exp\left\{-(T_P/\,\eta)^{\beta}\right\}}{\eta\,\Gamma\left[(1/\,\beta),(T_P/\,\eta)^{\beta}\right]}\right\}-1 \qquad (4.8)$$

ここで $\Gamma(\cdot)$ は完全ガンマ関数であり、$\Gamma[\cdot,\cdot]$ は不完全ガンマ関数である。

（2） ランダム予防保全の場合

ランダム予防保全で保全関数は $G(t) = exp(-\mu t)$ とおけるから、修復率を μ とすれば、$g(t) = \mu\, exp\,(-\mu\, t)$ が得られる。ランダム予防保全の場合にも定期予防保全と同様にして、１次と２次モーメントを求めることができる。ここで、表現を簡単化するため、$\kappa t = (t/\eta)^{\beta} + \mu t$ とおくと１次および２次のモーメントはそれぞれ

$$\langle\, t\, \rangle_R = \frac{\int_0^{\infty} exp\,(-\kappa\, t)\, dt}{1 - \mu\, \int_0^{\infty} exp\,(-\kappa\, t)\, dt} \tag{4.9}$$

$$\langle\, t^2\, \rangle_R = \frac{2\int_0^{\infty} t\, exp\,(-\kappa\, t)\, dt}{1 - \mu\, \int_0^{\infty} t\, exp\,(-\kappa\, t)\, dt} + \frac{2\int_0^{\infty} exp\,(-\kappa t)\, dt \cdot \mu \int_0^{\infty} t\, exp\,(-\kappa\, t)\, dt}{\{1 - \mu \int_0^{\infty} exp\,(-\kappa t)\, dt\}^2} \tag{4.10}$$

また、ランダム予防保全の場合の分散 $V_R(t)$ は、１次と２次モーメントから

$$V_R(t) = \frac{2\int_0^{\infty} t\, exp\,(-\kappa\, t)\, dt}{1 - \mu\, \int_0^{\infty} t\, exp\,(-\kappa\, t)\, dt} + \frac{2\int_0^{\infty} exp\,(-\kappa t)\, dt \cdot \mu \int_0^{\infty} t\, exp\,(-\kappa\, t)\, dt}{\{1 - \mu \int_0^{\infty} exp\,(-\kappa\, t)\, dt\}^2}$$

$$-\left\{\frac{\int_0^\infty exp\,(-\kappa\,t)\,dt}{1-\mu\,\int_0^\infty exp\,(-\kappa\,t)\,dt}\right\}^2 \tag{4.11}$$

従って、この場合の信頼度改善率と変動係数は次のように求められる。

$$\tau_R = \frac{\int_0^\infty exp\,(-\kappa\,t)\,dt}{1-\mu\int_0^\infty exp\,(-\kappa\,t)\,dt} - 1 \tag{4.12}$$

$$CV_R{}^2 = \frac{2\int_0^\infty t\,exp\,(-\kappa\,t)\,dt}{\{\int_0^\infty exp\,(-\kappa\,t)\,dt\}^2} - 1 \tag{4.13}$$

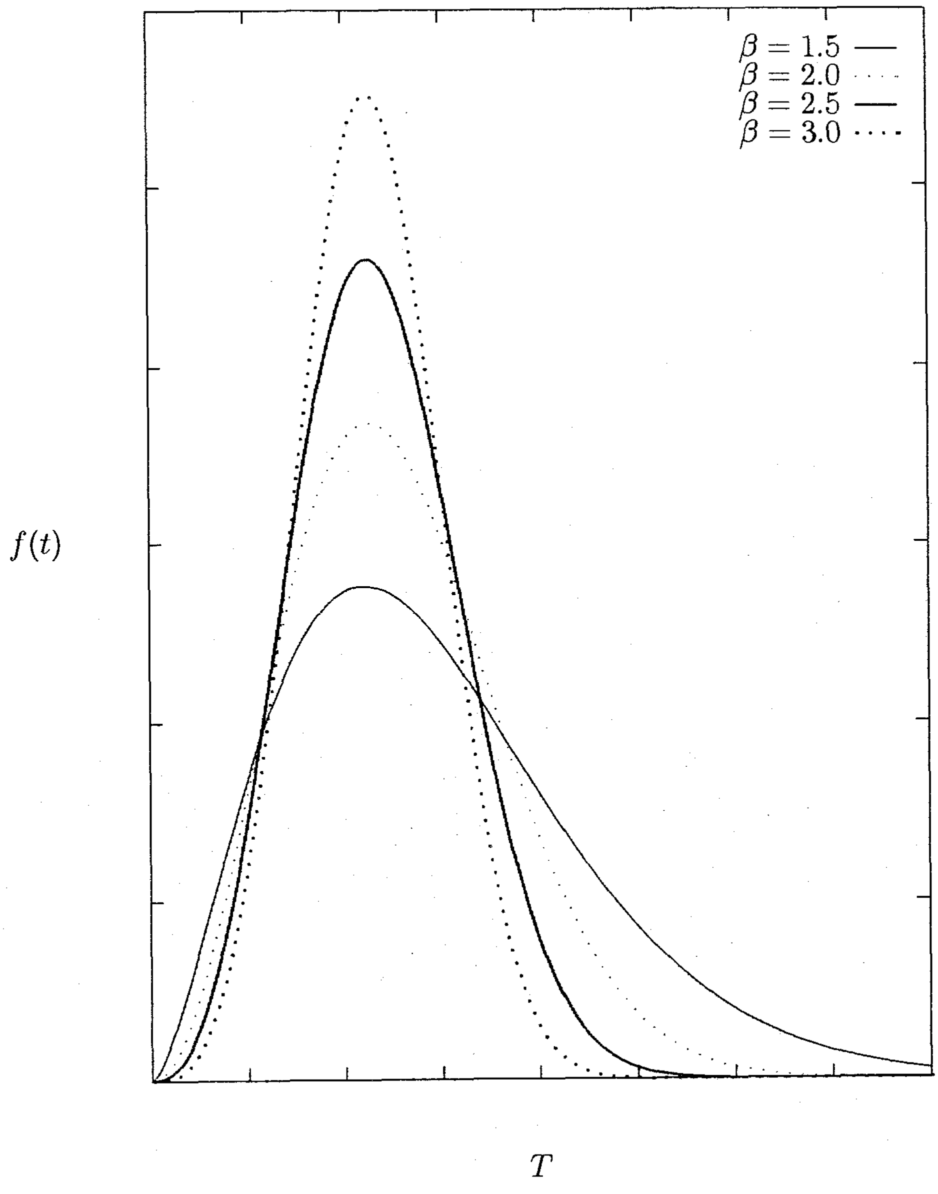

図 5: ワイブル分布の故障密度関数

5 計算方法と手順

すでに得られた理論結果を用いて、数値解析的に考察する。特に信頼度改善率や変動係数が主な計算となるが、それらを求めるために必要な考察を行う。また、ワイブル分布は正規化された時間を使用して計算することに注意する。

5.1 定期予防保全の場合

定期予防保全における平均と分散は（4.4）式と（4.6）式で与えられるから、それを計算すればよい。信頼度改善率や変動係数もまた（4.7）式と（4.8）式から得られる。計算において共通している点はいずれも不完全ガンマ関数 $\Gamma(\cdot,\cdot)$ を求める必要があるということである。

不完全ガンマ関数は以下のように定義されている。

$$\Gamma[a,x]=\int_0^x e^{-t}\,t^{a-1}dt \qquad (5.1)$$

上式の展開級数は、

$$\Gamma[a,x]=e^{-x}\,x^a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+1+n)}x^n \qquad (5.2)$$

となる。ただし、完全ガンマ関数は漸化式

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \tag{5.3}$$

で与えられるので、（ 5.2 ）式の計算は（ 5.3 ）式と $n-1$ の係数を用いる。

また、（ 5.2 ）式は、 $n+1$ よりも小さな x の値で急速に収束するという性質を持つが、ここで取り扱う数値計算では常に $x > n+1$ であるので収束値に関する問題はない。

さらに時間 T は $E(t) = 1 = \eta\,\Gamma(1/\beta{+}1)$ を用いて正規化した、よって η は $1/\Gamma(1/\beta{+}1)$ を用いて求めた。
なお、詳細なプログラムは付録に示す。

5.2 ランダム予防保全の場合

ランダムな保全において、平均は（ 4.9 ）式で、また分散は（ 4.11 ）式で計算する。一方、信頼度改善率と変動係数は（ 4.12 ）式と（ 4.13 ）式から得られる。積分方法として、ここでは Romberg 積分を用いた。 Romberg 積分は精度を逐次的に改善することができ、積分区間の刻み幅を増やした場合に以前の計算結果を利用できるため、十分な精度を保ったままで効率的に数値積分を行うことができる。

また、（ 4.9 ）式、（ 4.11 ）式、（ 4.12 ）式、（ 4.13 ）式のいずれの式も無限領域における積分を含んでいる。そこで、計算機上で数値積分を実行するため、下

式を用いて無限の積分範囲を有限な範囲に変数変換してこれらの式を計算した。

$$\int_a^b f(x) = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{t^2} f(\frac{1}{t})\, dt \qquad (ab > 0) \qquad (5.4)$$

なお、プログラムは定期予防保全の場合と同様に付録に示す。

6 計算結果と考察

得られた結果は、正規化された時間に基づいていることに注意する。そしてそれらについて考察する場合、特にワイブル分布に関する変動係数が必要であるため、まずこれについて検討する。

（1） ワイブル分布の変動係数

ワイブル分布の平均と分散は既に (4.2) 式と (4.3) 式で与えられているため、これらを (2.10) 式に代入すると、

$$CV(\beta) = \sqrt{\frac{\Gamma(2/\beta+1) - \Gamma^2(1/\beta+1)}{\Gamma^2(1/\beta+1)}} \qquad (6.1)$$

上式からワイブル分布の変動係数は β の関数であり、この式を用いて計算した結果を表 1に示す。なお、この表では $\beta > 1$ の領域を考慮して、β が 0.8 から 3.0 までの結果を示す。この表から、$\beta = 1$ の時、つまり指数分布の場合には $CV(1) = 1$ であり、β の増加に伴いＣＶ値は単調減少することがわかる。

（2） 定期予防保全の場合

ａ） 信頼度改善率

表 2は信頼度改善率 τ_P と変動係数 CV_P の数値結果であり、図 6は信頼度改善率、図 7は変動係数を示す。すでに述べたように、定期保全時間 $T_P = 1$ はワイブル分布の実時間の平均値に当たるので、図 6では平均値付近まで表示したことに

なる。なお、この図では信頼度改善率 τ_P の変動が極めて大きいため、対数目盛りで表す。この図から予防保全間隔 T_P が小さいほど改善率は増加し、形状パラメータ β が大きいほど増加することが明らかになる。また、改善率は β が大きいほど増加するが、図6のように β の値によって急激に減少する時刻が異なるものの、全体として $T_P < 1$ 、つまりワイブル分布の平均値付近かそれ以下で、急激に減少する。従って、予防保全間隔として、T_Pは1以下に設定すべきであるといえる。

b） 変動係数

図7は保全時間間隔 T_P を0からアイテムの持つ平均値の約3倍までにわたる変動係数 CV_P を示す。$T_P = 0$ ではいずれの β でも $CV_P = 1$ であり、T_P の増加につれて変動係数は減少するものの、形状パラメータ β によってそれらの収束値が異なることが観測される。

次に表1に示したワイブル分布の変動係数 $CV(\beta)$ と β の関係を用いて考察する。図7で$\beta = 2$ で $T_P = 0$ の時 $CV_P = 1$ となる。この値を表1に当てはめると $\beta = 1$ となり、指数分布に従うことがわかる。すなわち、定期保全間隔 T_P を短くするほど、故障と故障の時間間隔、つまり稼働時間間隔は指数分布に近づくことを示している。なお、$T_P = 0$ では β の値にかかわらず $CV_P = 1$ になる。

一方、同図から保全間隔 T_P が増加するにつれ CV_P は減少し、$T_P = 3$ 付近では β によって異なる値に収束する。例えば、表1から $\beta = 3$ に対応する CV_P値は0.363となり、この値を表2の CV_P値に当てはめると $\beta = 3$ となる。これを図7に当てはめると、 $\beta = 3$ で T_P が2付近から、CV_P は0.36あたりに収束することがわかる。つまり、定期保全時間 T_P を増加すると、アイテムが本来所有している β の値そのものとなる。このような特性は他の β においても同様である。こうして、定期保全間隔を極端に増加すると、定期保全を実施しないことと等価

であるから、この結果は極めて自然であるといえる。

(3) ランダム予防保全の場合

a) 信頼度改善率

表3はランダム予防保全の計算結果であり、図8は信頼度改善率、図9は変動係数を示し、表示の仕方は定期保全と同様である。この図8でランダム予防保全における平均時間間隔 T_R が 1 の場合、つまり $T_R = 1$ の時、T_R はワイブル分布の平均値と等価であることに注意する。同図から T_R が小さいほど改善率は増加し、形状パラメータ β が大きいほど増加するという特性は定期保全の場合と同様であるが、詳細に図6と図8を比較検討すると定期保全の場合の方が改善率は高いことがわかる。

b) 変動係数

図9から平均保全間隔 T_R を大きくするほど、変動係数は β によって異なる値に収束するが、これも定期保全の場合と同様である。例えば、表3で形状パラメータ $\beta = 2$ の場合、T_R が小さい時 $CV_R \doteqdot 0.999$ だから、この値を定期保全と同じように表1にあてはめると $\beta = 1$ となり、指数分布に従うことがわかる。つまりランダム保全の平均保全間隔 T_R を短くすると、たとえ $\beta = 2$ というワイブル分布であっても稼働時間間隔は指数分布になることを示す。一方、平均保全間隔 T_R を増大すると、図9や表3から CV_R 値は 0.523 となり、この値を表1の CV_R 値に当てはめると $\beta = 2$ となる。つまり平均保全間隔時間 T_R を増加させると、アイテムが本来所有している形状パラメータ β に従うことがわかる。

表 1: ワイブル分布の形状パラメータ β の変化による CV 、$MEAN$、σ^2 の数値表

β	CV	$MEAN$	σ^2
0.80	1.2605	1.1330	2.0397
0.85	1.1815	1.0880	1.6523
0.90	1.1130	1.0522	1.3715
0.95	1.0530	1.0234	1.1614
1.00	1.0000	1.0000	1.0000
1.05	0.9527	0.9808	0.8731
1.10	0.9102	0.9649	0.7714
1.15	0.8718	0.9517	0.6884
1.20	0.8369	0.9407	0.6197
1.25	0.8050	0.9314	0.5621
1.30	0.7757	0.9236	0.5133
1.35	0.7487	0.9170	0.4714
1.40	0.7238	0.9114	0.4351
1.45	0.7006	0.9067	0.4035
1.50	0.6790	0.9027	0.3757
1.55	0.6588	0.8994	0.3511
1.60	0.6399	0.8966	0.3292
1.65	0.6222	0.8942	0.3095
1.70	0.6055	0.8922	0.2919
1.75	0.5897	0.8906	0.2759
1.80	0.5749	0.8893	0.2614
1.85	0.5608	0.8882	0.2481
1.90	0.5475	0.8874	0.2360
1.95	0.5348	0.8867	0.2249
2.00	0.5227	0.8862	0.2146

β	CV	$MEAN$	σ
2.05	0.5112	0.8859	0.2051
2.10	0.5003	0.8857	0.1963
2.15	0.4898	0.8856	0.1882
2.20	0.4798	0.8856	0.1806
2.25	0.4703	0.8857	0.1735
2.30	0.4611	0.8859	0.1669
2.35	0.4523	0.8862	0.1606
2.40	0.4438	0.8865	0.1548
2.45	0.4357	0.8868	0.1493
2.50	0.4279	0.8873	0.1441
2.55	0.4204	0.8877	0.1393
2.60	0.4131	0.8882	0.1347
2.65	0.4062	0.8887	0.1303
2.70	0.3994	0.8893	0.1262
2.75	0.3929	0.8899	0.1222
2.80	0.3866	0.8905	0.1185
2.85	0.3805	0.8911	0.1150
2.90	0.3747	0.8917	0.1116
2.95	0.3690	0.8923	0.1084
3.00	0.3634	0.8930	0.1053
3.05	0.3581	0.8936	0.1024
3.10	0.3529	0.8943	0.0996
3.15	0.3479	0.8950	0.0969
3.20	0.3430	0.8957	0.0944

表 2: ワイブル分布における定期保全、信頼度改善率と変動係数の計算結果

T_P	$\beta = 1.5$		$\beta = 2.0$		$\beta = 2.5$		$\beta = 3.0$	
	τ_P	CV_P	τ_P	CV_P	τ_P	CV_P	τ_P	CV_P
0.1	2.697	0.997	11.749	0.999	41.666	0.999	139.460	1.000
0.2	1.627	0.992	5.400	0.995	14.120	0.997	34.159	0.999
0.3	1.159	0.986	3.294	0.988	7.272	0.992	14.679	0.995
0.4	0.884	0.978	2.251	0.979	4.417	0.984	7.878	0.989
0.5	0.700	0.969	1.631	0.967	2.923	0.972	4.744	0.978
0.6	0.567	0.960	1.225	0.953	2.033	0.956	3.054	0.962
0.7	0.466	0.949	0.940	0.936	1.458	0.935	2.046	0.940
0.8	0.387	0.938	0.731	0.916	1.064	0.910	1.403	0.911
0.9	0.324	0.926	0.574	0.895	0.784	0.880	0.972	0.874
1.0	0.272	0.913	0.452	0.871	0.579	0.846	0.674	0.830
1.5	0.117	0.846	0.134	0.732	0.113	0.632	0.082	0.539
2.0	0.049	0.782	0.032	0.608	0.013	0.470	0.003	0.376
2.5	0.019	0.733	0.006	0.544	0.001	0.431	0.000	0.364
3.0	0.007	0.704	0.001	0.526	0.000	0.428	0.000	0.363
3.5	0.002	0.689	0.000	0.523	0.000	0.428	0.000	0.363
4.0	0.001	0.682	0.000	0.523	0.000	0.428	0.000	0.363
4.5	0.000	0.680	0.000	0.523	0.000	0.428	0.000	0.363
5.0	0.000	0.679	0.000	0.523	0.000	0.428	0.000	0.363

表 3: ワイブル分布におけるランダム保全、信頼度改善率と変動係数の計算結果

T_R	μ	$\beta = 1.5$		$\beta = 2.0$		$\beta = 2.5$		$\beta = 3.0$	
		τ_R	CV_R	τ_R	CV_R	τ_R	CV_R	τ_R	CV_R
0.02	50.000	5.211	0.998	30.903	0.999	143.114	1.000	597.098	1.000
0.03	33.333	4.083	0.997	20.283	0.999	77.246	0.999	259.486	1.000
0.04	25.000	3.409	0.996	14.999	0.998	49.955	0.999	146.032	0.999
0.05	20.000	2.955	0.994	11.832	0.996	35.514	0.998	93.077	0.999
0.06	16.667	2.620	0.992	9.728	0.995	26.871	0.997	64.557	0.998
0.07	14.286	2.358	0.990	8.231	0.993	21.213	0.995	47.389	0.997
0.08	12.500	2.152	0.988	7.114	0.990	17.282	0.994	36.271	0.996
0.09	11.111	1.982	0.986	6.247	0.988	14.414	0.992	28.665	0.994
0.10	10.000	1.839	0.983	5.558	0.985	12.253	0.989	23.244	0.992
0.20	5.000	1.087	0.959	2.529	0.952	4.249	0.953	6.138	0.955
0.30	3.333	0.776	0.935	1.582	0.914	2.345	0.906	3.028	0.903
0.40	2.500	0.605	0.913	1.134	0.878	1.569	0.861	1.916	0.851
0.50	2.000	0.495	0.894	0.879	0.846	1.164	0.821	1.376	0.806
0.60	1.667	0.419	0.877	0.714	0.819	0.920	0.787	1.064	0.767
0.70	1.429	0.363	0.863	0.601	0.796	0.758	0.758	0.865	0.734
0.80	1.250	0.321	0.850	0.518	0.775	0.643	0.733	0.726	0.706
0.90	1.111	0.287	0.839	0.455	0.758	0.558	0.711	0.625	0.682
1.00	1.000	0.259	0.829	0.405	0.742	0.493	0.692	0.548	0.661
2.00	0.500	0.132	0.771	0.193	0.655	0.225	0.587	0.244	0.543
3.00	0.333	0.089	0.746	0.126	0.617	0.145	0.542	0.156	0.493
4.00	0.250	0.067	0.731	0.094	0.596	0.107	0.517	0.115	0.465
5.00	0.200	0.054	0.722	0.074	0.583	0.085	0.501	0.091	0.447
6.00	0.167	0.045	0.715	0.062	0.574	0.070	0.490	0.075	0.434
7.00	0.143	0.038	0.710	0.053	0.567	0.060	0.482	0.064	0.425
8.00	0.125	0.034	0.707	0.046	0.562	0.052	0.475	0.056	0.418
9.00	0.111	0.030	0.704	0.041	0.558	0.046	0.470	0.049	0.412
10.00	0.100	0.027	0.701	0.037	0.554	0.042	0.466	0.044	0.408
∞	0.000	0.000	0.679	0.000	0.523	0.000	0.428	0.000	0.363

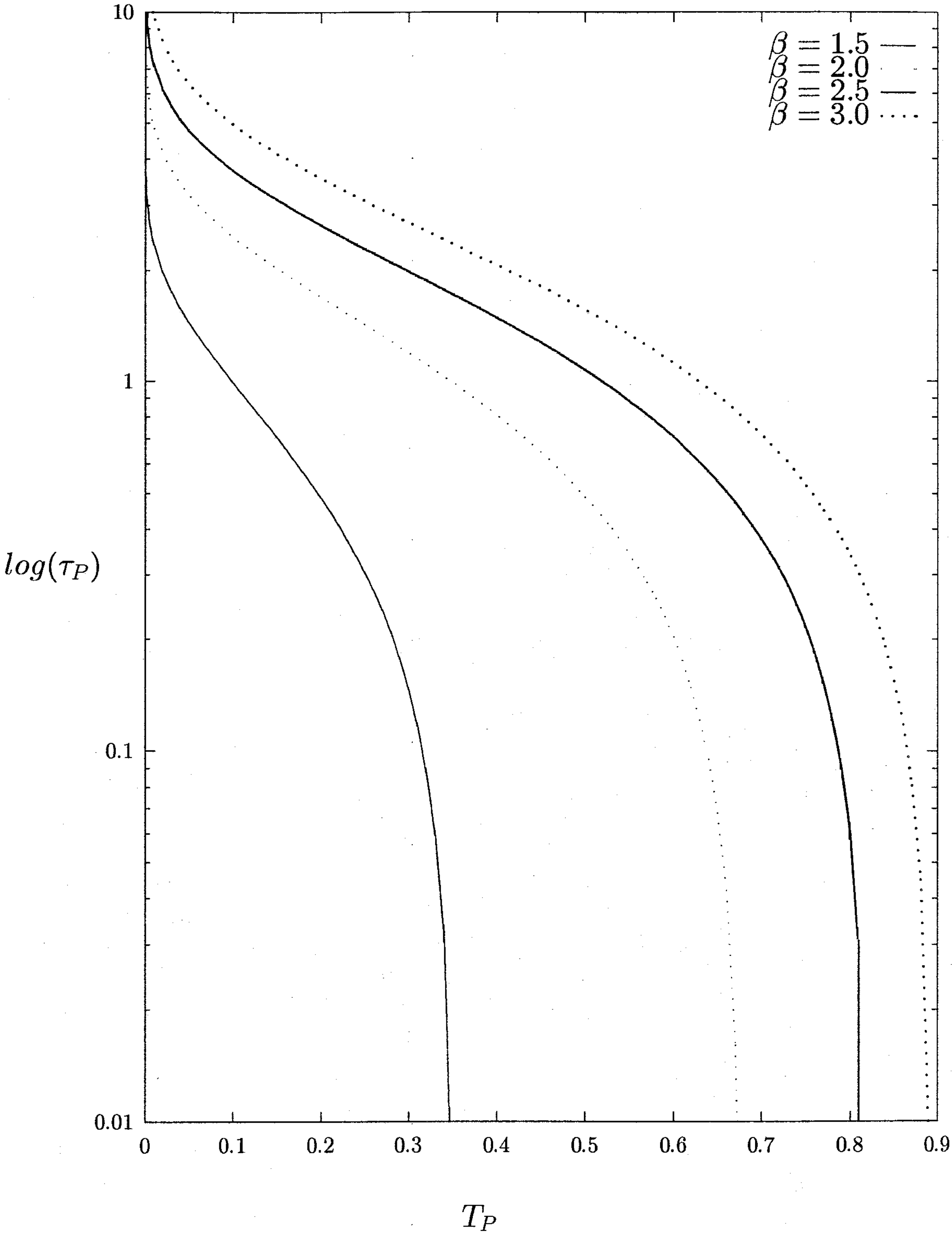

図 6: ワイブル分布における定期保全の信頼度改善率

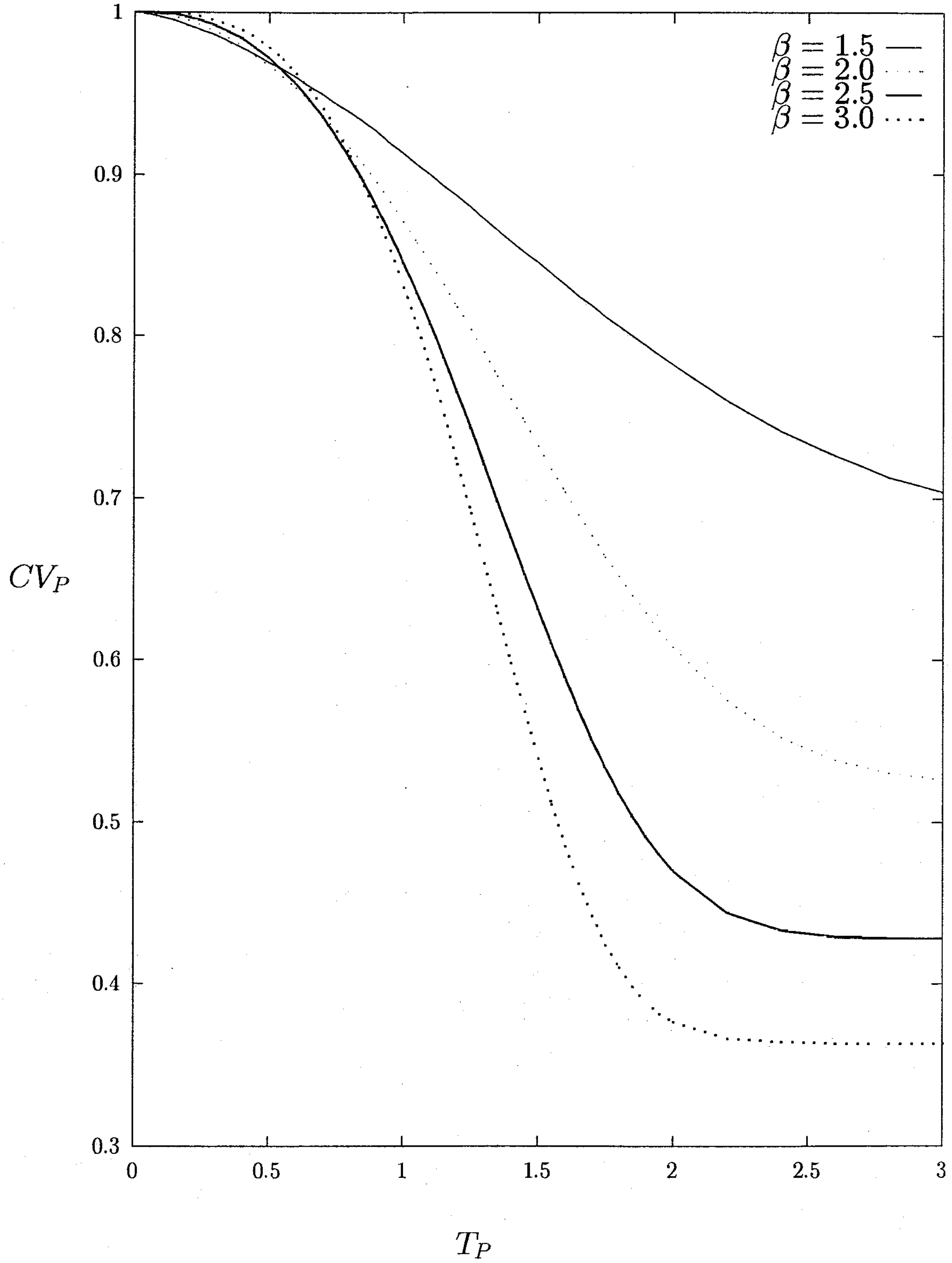

図 7: ワイブル分布における定期保全の変動係数

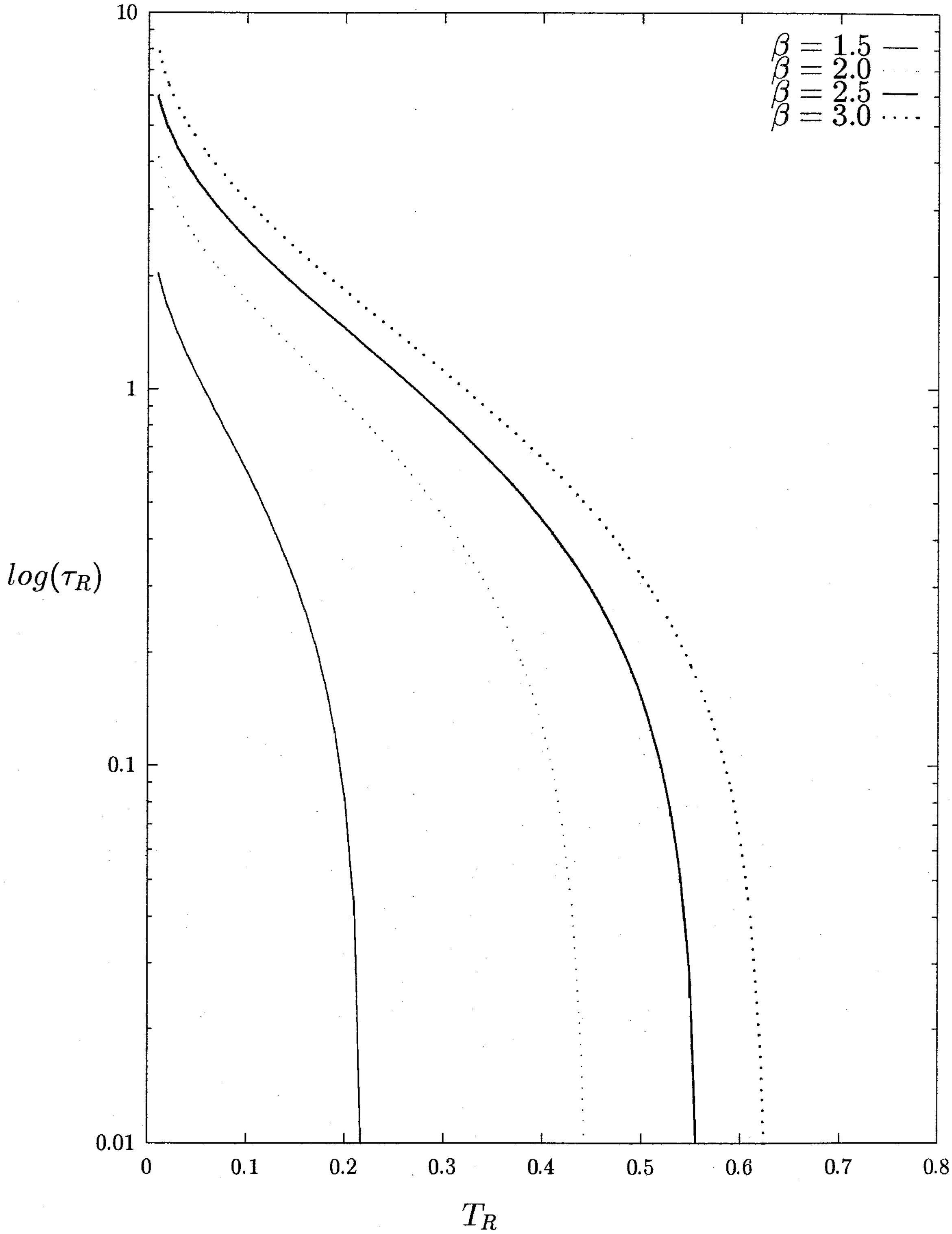

図 8: ワイブル分布におけるランダム保全の信頼度改善率

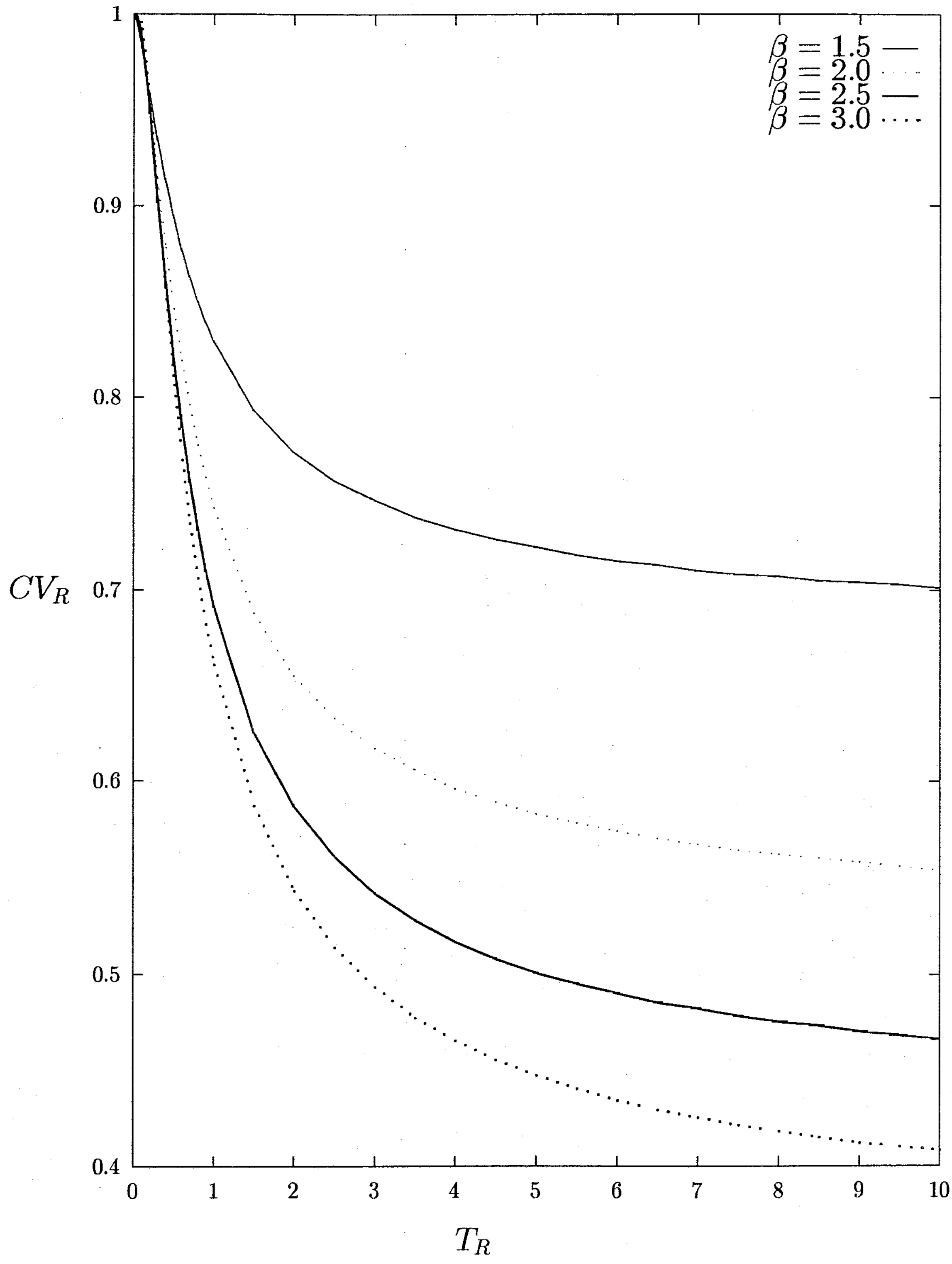

図 9: ワイブル分布におけるランダム保全の変動係数

7 あとがき

本研究では、予防保全理論における一般式をラプラス変換を用いることによって求め、また、ディラックの関数に従う定期予防保全とランダム予防保全の二つの理論結果を明らかにした。信頼度関数としてワイブル分布に従うアイテムを取り上げ、それ対して予防保全を実施した場合について理論的に検討し２つの予防保全方法に関する結果を得た。次にそれらの結果に基づいて数値計算を行い、その結果によりワイブル分布における二つの保全方法に関する有益な結果が得られた。

まず第一に、アイテムの故障間隔を増加させるためには、信頼度改善率については定期保全、ランダム保全のどちらの場合でも保全間隔がアイテムの平均寿命時間より短い時間で実施したほうが有利であること、また定期保全の方がランダム保全より大きな値を持つことを明らかにした。

一方、変動係数については、いずれの保全方式においても予防保全間隔が短い場合ではCV値が約1となり、アイテムのの稼働時間間隔は指数分布に従うこと、また予防保全間隔が大きくなるとアイテム自身の持つ寿命分布と一致することを示した。

今後の課題としては、本研究で得られた結果を現実の保全データやフィールドデータと比較検討し、実用的な応用を検討することが挙げれれる。これらについては機会があればさらに調査研究し発表していきたい。

最後に本研究で大変お世話になった堀籠 教夫 教授、平沼 賢次 助教授はじめ研究室の多くの方々に心からお礼を申し上げます。

参考文献

[1] Barlow,R, Proschan,F, Hunter,L, *"Mathematical Theory of Reliability"* , John Wiley and Sons inc., 1965, pp61–63.

[2] M.Horigome, Y.Kawasaki & Q.Chen, *"Preventive Replacement Policies & Their Apllication to Weibulll Distribution"*, 1994, IEICE Trance.Fundamentals, vol.E-77-A.No.1, pp.240–243.

[3] Weiss,G. H, *On the Theory of Replacment of Machinery with a Random Failure Time* , Naval Research Logistics Quartely, 1956, vol.3, No.4, pp279–293.

[4] 三根, 河合, 信頼性・保全性の数理, 朝倉書店, 1982.

[5] 塩見 弘, 信頼性工学入門, 丸善株式会社, 1972.

[6] 市田 嵩, 保全性工学入門, 日科技連出版社, 1984.

[7] 阿部, システム信頼性解析法, 日科技連出版社, 1976.

[8] 依田、尾崎、中川, 応用確率論, 朝倉書店, 1989, pp178–179.

[9] 川崎、堀籠, 舶用機械故障解析例と修理モデル的検討, 信学技報, 1974, No.R74-7, pp19–26.

[10] William H.Press,Brian P.Flannery, Saul A.Teukolsky, William T.Vetterling, *"NUMERICAL RECIPES in C"* , Cambridge University Press, 1988.

[11] 戸川 隼人, 数値計算技法, オーム社, 1972, pp110–134.

付録

数値結果から定期予防保全、ランダム予防保全、いずれの保全においても予防保全間隔が小さい場合では変動係数ＣＶ値が約１となり、アイテムの平均稼働時間間隔は指数分布に従い、予防保全間隔が大きくなるとアイテムの持つ寿命分布に一致することを明らかにした。ここでは、これらの予防保全特性を理論的に証明する。

1　定期予防保全の場合

1.1　平均保全時間間隔が大きいとき

定期予防保全の場合の１次と２次モーメントは以下のように表される。

$$\langle t \rangle_P = \frac{\eta/\beta \cdot \Gamma\left[(\frac{1}{\beta}), (\frac{T_P}{\eta})^\beta\right]}{\Gamma\left[1, (\frac{T_P}{\eta})^\beta\right]}$$

$$\langle t^2 \rangle_P = \frac{2\eta^2/\beta \cdot \Gamma\left[(\frac{2}{\beta}), (\frac{T_P}{\eta})^\beta\right]}{\Gamma\left[1, (\frac{T_P}{\eta})^\beta\right]} + \frac{2T_P\,\eta/\beta \cdot e^{-(\frac{T_P}{\eta})^\beta} \cdot \Gamma\left[(\frac{1}{\beta}), (\frac{T_P}{\eta})^\beta\right]}{\Gamma^2\left[1, (\frac{T_P}{\eta})^\beta\right]}$$

平均保全時間間隔 T_P が大きいとき、$(\frac{T_P}{\eta})^\beta \to \infty$ となることから、$\Gamma[\frac{1}{\beta}, (\frac{T_P}{\eta})^\beta]$、$\Gamma[1, (\frac{T_P}{\eta})^\beta]$、$\Gamma[\frac{2}{\beta}, (\frac{T_P}{\eta})^\beta]$ はそれぞれ、$\Gamma(\frac{1}{\beta})$、$\Gamma(1) = 1$、$\Gamma(\frac{2}{\beta})$ となる。

従って、1次モーメントは以下のようになる。

$$\langle t \rangle_P = \frac{\eta / \beta \cdot \Gamma(\frac{1}{\beta})}{\Gamma(1)} = \frac{\eta}{\beta} \Gamma(\frac{1}{\beta}) = \eta \Gamma(\frac{1}{\beta} + 1)$$

一方、2次モーメントでは第2項が $T_P \to \infty$ で0になり、第1項目については以下のようになる。

$$\langle t^2 \rangle_P = \frac{2\eta^2 / \beta \cdot \Gamma(\frac{2}{\beta})}{\Gamma(1)} = \eta^2 \Gamma(\frac{2}{\beta} + 1)$$

以上から、定期予防保全において平均保全間隔が大きいときの変動係数 CV_P は次のように表される。

$$CV_P = \lim_{T_P \to \infty} \sqrt{\frac{\langle t^2 \rangle}{\langle t \rangle^2} - 1} = \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{2}{\beta} + 1)}{\Gamma^2(\frac{1}{\beta} + 1)} - 1}$$

上式の値は、ワイブル分布の持つＣＶ値の定義そのものである。

1.2　平均保全時間間隔が小さいとき

これがうまくいくといいのですが…。

2　ランダム予防保全の場合

2.1　平均保全時間間隔が大きいとき

ランダム予防保全の場合の変動係数は以下のように表される。

$$CV_R{}^2 = \frac{2\int_0^\infty t\,e^{-\kappa t}\,dt}{\{\int_0^\infty e^{-\kappa t}\,dt\}^2} - 1$$

ここで、$\kappa t = (\frac{t}{\eta})^\beta + \mu t$ である。

ランダム予防保全の場合の平均保全間隔時間 T_R は保全率 μ の逆数 $1/\mu$ で表される。この平均保全間隔時間 $1/\mu$ が大きいとき、保全率 μ は0に近づく。よって、$e^{-\mu t} \doteqdot 1$ と見なすことができる。

$$CV_R{}^2 \doteqdot \frac{2\int_0^\infty t\,e^{-(\frac{t}{\eta})^\beta}\,dt}{\{\int_0^\infty e^{-(\frac{t}{\eta})^\beta}\,dt\}^2}$$

また、上式の分子と分母は以下のようになる。

$$\text{分子} = 2\int_0^\infty t\,e^{-(\frac{t}{\eta})^\beta}dt = \frac{2\,\eta^2}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta}) = \eta^2\Gamma(\frac{2}{\beta}+1)$$

$$\text{分母} = \eta^2\,\Gamma^2(\frac{1}{\beta}+1)$$

故に、平均保全間隔時間 T_R が大きいとき、変動係数 CV_R は

$$CV_R = \sqrt{\frac{\eta^2\,\Gamma(\frac{2}{\beta}+1)}{\eta^2\,\Gamma(\frac{1}{\beta}+1} - 1} = \sqrt{\frac{\Gamma\,(\frac{2}{\beta}+1)}{\Gamma^2\,(\frac{1}{\beta}+1)} - 1}$$

となり、ワイブル分布のＣＶ値に等しくなることがわかる。

2.2 平均保全時間間隔が小さいとき

平均保全時間間隔が小さいとき T_R の逆数である保全率 μ は ∞ に近づく。よって、平均保全時間間隔 $1/\mu$ とワイブル分布の平均値 $\eta\Gamma(\frac{1}{\beta}+1)$ との大小関係は $\eta\Gamma(\frac{1}{\beta}+1) \gg 1/\mu$ となる。ここで、$\beta \geq 1$ より、$\Gamma(\frac{1}{\beta}+1) \leq 1$ であることから $\eta \gg 1/\mu \rightarrow 1/\eta \ll \mu$ である。よって、$e^{-(\frac{t}{\eta})^\beta} \doteqdot 1$ と見なすことができる。

故に、ランダム予防保全において平均保全時間間隔が小さいときの変動係数は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
CV_R &= \sqrt{\frac{2\int_0^\infty t\,e^{-(\frac{t}{\eta})^\beta}\cdot e^{-\mu t}\,dt}{\{\int_0^\infty e^{-(\frac{t}{\eta})^\beta}\cdot e^{-\mu t}\,dt\}^2}-1} \\
&\doteqdot \sqrt{\frac{2\int_0^\infty t\,e^{-\mu t}\,dt}{\{\int_0^\infty e^{-\mu t}\,dt\}^2}-1} \\
&= \sqrt{\frac{2\ (1/\mu)^2}{(1/\mu)^2}-1} = 1
\end{aligned}
$$

以上のことから、平均保全時間間隔が小さい場合ＣＶ値は１に収束することが証明された。このことから、平均保全時間間隔が小さい場合には、β の値が $\beta > 1$ において、どのように変化してもアイテムの平均稼働時間間隔は指数分布に従うことがわかる。

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>

#define ITMAX 100
#define EPS 1e-08

double kaizen_hendo(double beta,double time);
double ingam(double a,double x);
double gammp(double a,double x);
double gamma(double xx);

double xx;
double a,x;

main()
{
    double beta,time,increce;
    printf("\n 定期交換\n");
    for(beta=1.5;beta<=3.0;beta=beta+0.5){
        printf("\n\n β=%4.2f\n\n",beta);
        printf(" TIME\t\t 信頼度改善率 : τ");
        printf("\t\t 変動係数 : CV\n\n");

        increce=0.1;

        for(time=0.1;time<=5.0;time=time+increce){
            if(time>=0.9){
                increce=0.5;
            }
            kaizen_hendo(beta,time);
        }
    }
}
```

```
double kaizen_hendo(double beta,double time)
{
    double G,eta,Teta,IGB1,EXPteta;
    double KAIZEN;
    double Tgam;
    double IGB2G,IGB1G;
    double EXPtgam;
    double sum,HENDO;

    G=exp(gamma(1/beta+1));
    eta=1/G;

    Teta=pow(time/eta,beta);
    IGB1=ingam(1/beta,Teta);
    EXPteta=exp(-Teta);

    KAIZEN=(eta*IGB1)/(beta*(1-EXPteta))-1;

    Tgam=pow(time*G,beta);

    IGB2G=ingam(2/beta,Tgam);
    IGB1G=ingam(1/beta,Tgam);

    EXPtgam=exp(-Tgam);

    sum=IGB2G*(1-EXPteta)/(IGB1G*IGB1G)+G*time*EXPtgam/IGB1G;
    HENDO=sqrt(2*beta*sum-1);

    printf(" %4.2f\t\t%f\t\t\t%f\n",time,KAIZEN,HENDO);

    return(0);
}


double gamma(double xx)
{
```

```
    return(lgamma(xx));
}

double ingam(double a,double x)
{

    return(exp(gamma(a))*gammp(a,x));
}

double gammp(double a,double x)
{
    void gser(double *gamser,double a,double x,double *gln);
    double gamser,gammcf,gln;

    gser(&gamser,a,x,&gln);
    return gamser;
}

void gser(double *gamser,double a,double x,double *gln)
{
    double gamma(double xx);

    int n;
    double sum,del,ap;

    *gln=gamma(a);
    if(x<=0){
        if(x<0)
        *gamser=0.0;
        return;
    } else {
         ap=a;
         del=sum=1.0/a;
         for(n=1;n<=ITMAX;n++){
              ++ap;
              del *= x/ap;
```

```
                sum += del;
                if(fabs(del)<fabs(sum)*EPS) {
                    *gamser=sum*exp(-x+a*log(x)-(*gln));
                     return;
                }
            }
            return;
        }
    }
```

```
#include <math.h>

#define EPS 1.0e-6
#define JMAX 14
#define JMAXP JMAX+1
#define K 5

double gamma(double x);
float midinf(float (*func)(float), float aa, float bb, int n);
void polint(float *xa, float *ya, int n, float x, float *y, float *dy);
float qromb(float (*func)(float), float a, float b);
float qromo(float (*func)(float), float a, float b,
float (*midinf)(float (*)(float),float,float,int));
float trapzd(float (*func)(float), float a, float b, int n);

float func(float x);
float funk(float x);

float beta,mew;
float gam_beta;


main()
{
    float gam,seki1,seki2;
    float T,kaizen,CV;
    float a,b,c;

    int n;

    for(beta=1.5;beta<=3.0;beta=beta+0.5){
        printf("\tbeta=%4.2f\n",beta);
        printf("\tT\t μ\t\t 信頼度改善率：τ
                          \t\t\t 変動係数:CV\n");

            for(T=0.5;T<=10.0;T=T+0.01){
```

```
    mew=1/T;

                gam=gamma(1/beta+1);
                gam_beta=pow(gam,beta);

                seki1=qromb(func,a,b)+qromo(func,b,c,midinf);
                seki2=qromb(funk,a,b)+qromo(funk,b,c,midinf);

                kaizen=seki1/(1-mew*seki1)-1;
                CV=sqrt((2*seki2/(seki1*seki1))-1);

                printf("\t%4.2f\t%4.2f\t\t%f\t\t%f\n",T,mew,kaizen,CV);
            }
            printf("\n");
    }
}


double gamma(double x)
{
    return exp(lgamma(x));
}


float func(float x)
{
    float f;
    f=exp(-(gam_beta*pow(x,beta)+mew*x));
    return f;
}


float funk(float x)
{
    float f;
```

```
    f=x*exp(-(gam_beta*pow(x,beta)+mew*x));
    return f;
}


#define FUNC(x) ((*func)(1.0/(x))/((x)*(x)))

float midinf(float (*func)(float),
                  float aa, float bb, int n)

{
    float x,tnm,sum,del,ddel,b,a;
    static float s;
    int it,j;

    b=1.0/aa;
    a=1.0/bb;

    if(n == 1) {
        return (s=(b-a)*FUNC(0.5*(a+b)));
    } else {
        for(it=1,j=1;j<n-1;j++) it *= 3;
        tnm=it;
        del=(b-a)/(3.0*tnm);
        ddel=del+del;
        x=a+0.5*del;
        sum=0.0;

        for (j=1;j<=it;j++) {
            sum += FUNC(x);
            x += ddel;
            sum += FUNC(x);
            x += del;
         }
         s=(s+(b-a)*sum/tnm)/3.0;
         return s;
```

```
    }
}


void polint(float xa[], float ya[], int n,
                    float x, float *y, float *dy)
{
    int i,m,ns=1;
    float den,dif,dift,ho,hp,w;
    float *c,*d;

    dif=fabs(x-xa[1]);
    c=vector(1,n);
    d=vector(1,n);
    for (i=1;i<=n;i++) {
        if ( (dift=fabs(x-xa[i])) < dif) {
            ns=i;
            dif=dift;
        }
        c[i]=ya[i];
        d[i]=ya[i];
    }
    *y=ya[ns--];
    for (m=1;m<n;m++) {
        for (i=1;i<=n-m;i++) {
            ho=xa[i]-x;
            hp=xa[i+m]-x;
            w=c[i+1]-d[i];
            if ( (den=ho-hp) == 0.0)
                exit(1);
                den=w/den;
                d[i]=hp*den;
                c[i]=ho*den;
            }
        *y += (*dy=(2*ns < (n-m) ? c[ns+1] : d[ns--]));
    }
```

```
    free_vector(d,1,n);
    free_vector(c,1,n);
}


float qromb(float (*func)(float), float a, float b)
{
    void polint(float xa[], float ya[], int n,
                     float x, float *y, float *dy);
    float trapzd(float (*func)(float), float a,
                     float b, int n);
    void nrerror(char error_text[]);
    float ss,dss;
    float s[JMAXP+1],h[JMAXP+1];
    int j;

    h[1]=1.0;
    for (j=1;j<=JMAX;j++) {
        s[j]=trapzd(func,a,b,j);
        if (j >= K) {
            polint(&h[j-K],&s[j-K],K,0.0,&ss,&dss);
            if (fabs(dss) < EPS*fabs(ss)) return ss;
        }
        s[j+1]=s[j];
        h[j+1]=0.25*h[j];
    }
    exit(1);
}


float qromo(float (*func)(float), float a, float b,
        float (*midinf)(float(*)(float), float, float, int))
{
    void polint(float xa[], float ya[], int n,
              float x, float *y,float *dy);
    void nrerror(char error_text[]);
```

```
    int j;
    float ss,dss;
    float h[JMAXP+1],s[JMAXP+1];

    h[1]=1.0;
    for (j=1;j<=JMAX;j++) {
        s[j]=(*midinf)(func,a,b,j);
            if (j >= K) {
                polint(&h[j-K],&s[j-K],K,0.0,&ss,&dss);
                    if (fabs(dss) < EPS*fabs(ss)) return ss;
            }
            s[j+1]=s[j];
            h[j+1]=h[j]/9.0;
    }
    exit(1);
}


#define FUNC(x) ((*func)(x))

float trapzd(float (*func)(float), float a, float b, int n)

{
    float x,tnm,sum,del;
    static float s;
    int it,j;

    if(n == 1) {
        return (s=0.5*(b-a)*(FUNC(a)+FUNC(b)));
    } else {
         for(it=1,j=1;j<n-1;j++) it <<= 1;
             tnm=it;
             del=(b-a)/tnm;
             x=a+0.5*del;
             for (sum=0.0,j=1;j<=it;j++,x+=del) sum += FUNC(x);
```

```
            s=0.5*(s+(b-a)*sum/tnm);
            return s;
    }
}
```